a

Wyrażenia algebraiczne

Wreszcie przychodzi pora, by przestać bawić się w księgowość, a wkroczyć w prawdziwą matematykę. Dziedzina, którą głównie zajmowaliśmy się do tej pory, to *arytmetyka* – stosunkowo żmudna nauka, mówiąca jedynie, jak grzebać w kałuży liczb naturalnych, wymiernych i całkowitych, aby nie pobrudzić sobie za bardzo rąk. Teraz wchodzimy o szczebel wyżej w wysokiej drabinie abstrakcji – rozpoczynamy znajomość z *algebrą*.

Wzór na doskonałość

Intuicje

Po kilku miesiącach intensywnego odchudzania tabletkami „Nopain” Michaś zaczął dostrzegać rzeczywiste rezultaty – patrząc w lustro, nie może odmówić swej sylwetce cech boskich. Z obawy przed czyhającą za rogiem anoreksją, Michaś postanowił upewnić się, czy nie grozi mu niedowaga. Z głową zajętą planowaniem, w jaki sposób zacząłby walkę ze swoją niedowagą, przystąpił do obliczenia swojego BMI: na lekcjach biologii usłyszał, że wskaźnik BMI uzyskujemy, mnożąc swój wzrost w metrach przez siebie, a następnie dzieląc swoją wagę w kilogramach przez uzyskany wynik. Jeżeli wskaźnik jest mniejszy niż 18,5, mamy niedowagę, wartość między 18,5 a 25 oznacza normę, zaś wskaźnik powyżej 25 sugeruje nadwagę.

Powyższą regułkę matematyk zapisze w postaci *wzoru*:

Prawdopodobnie niejedna osoba o niebanalnym poczuciu estetyki zauważy, że użycie polskiego słowa „waga” w uniwersalnym matematycznym wzorze jest przynajmniej nieeleganckie. Z tego powodu zamiast słownych opisów w matematycznych formułach zawsze będziemy używać jednoliterowych oznaczeń:

Następnie po dumnym zapisaniu wzoru wyjaśnimy z dowolną dokładnością i czułością osobie niewtajemniczonej nasze oznaczenia:

– masa ciała w kilogramach

– wzrost w metrach

– współczynnik BMI niosący konsekwencje:

– niedowaga

– norma

– nadwaga

Z punktu widzenia rachunków, które należy wykonać, zapis za pomocą wzoru jest znacznie bardziej przejrzysty niż wyjaśnienie słowne. Możemy teraz taśmowo przyjmować kolejnych delikwentów i wydawać wyroki dotyczące ich budowy ciała:

* Pani Krystyna: waga 64 kg, wzrost 1,87m

Niedowaga to niska cena za 20 miejsce w konkursie top-model.

* Stefan: waga 79 kg, wzrost 1,78m

Waga w normie to ulga dla Stefanowego sumienia, targanego czwartkowym pączkiem z różą.

* Michaś: waga 103 kg, wzrost 1,75m

Michaś pełen niedowierzania postanowił przerzucić się na tabletki „Nogain”.

Oznaczenia literowe

Intuicje

Aby z łatwością wyrażać ogólne myśli matematyczne, stosujemy litery, które pełnią rolę dość dowolnych liczb – liczb jakby „czekających na swoją wartość”. We wzorze

Litery i to *zmienne*, pod które należy podstawić konkretne wartości liczbowe, kiedy przyjdzie na to pora.

Litery mogą zastępować także dowolne *stałe* matematyczne lub fizyczne. Dla przykładu weźmy zależność między długością w metrach a długością w milach angielskich:

gdzie oznacza jakąkolwiek długość wyrażoną w milach angielskich, zaś oznacza tę samą długość wyrażoną w metrach. Przykładowo podstawiając otrzymamy i oznacza to tyle, że dwie mile angielskie to to samo, co metra. Powyższy wzór moglibyśmy zapisać jako

zastępując literą dość długą liczbę o stałej wartości . Jest to praktyka chętnie stosowana przez fizyków, którzy nie lubią, kiedy w ich wzorach pojawiają się przydługie liczby wymierne.

Gdy wzory stają się rozbudowane i wymagają użycia wielu zmiennych, bądź też jeśli do oznaczenia różnych zmiennych chcielibyśmy zastosować tę samą literę, zaleca się stosowanie *indeksów dolnych*. Weźmy wzór wynaleziony przez dietetyków mający rzekomo określać liczbę kalorii, jaką dana osoba powinna spożyć w ciągu dnia:

gdzie:

to kalorie przeznaczone na przemianę materii

to kalorie spalane podczas aktywności fizycznej

to kalorie potrzebne do wykonywania podstawowych czynności życiowych

to kalorie potrzebne na spalanie pożywienia

każdy ze składników powyższej sumy oznacza jakieś kalorie, więc każdy z nich oznaczamy literką , jednak dla rozróżnienia *indeksujemy* te zmienne adekwatnymi przypisami.

Wgłębiając się w dietetyczny szał, zobaczmy jak wyliczyć każdy z powyższych składników[[1]](#footnote-1):

gdzie

oznacza masę ciała w kilogramach

to wzrost w centymetrach

to wiek w latach

gdzie

– liczba minut poświęconych na trening siłowy

- liczba minut poświęconych na trening aerobowy

– liczba podjętych treningów

* dla osoby szczupłej, dla osoby tęższej, dla osoby atletycznie zbudowanej

Ten jakże złożony wzór możemy z przyjemnością zaaplikować dla przypadku Michasia:

* Waga: 103 kg, wzrost: 175 cm, wiek: 14 lat
* ze względu na brak aktywności fizycznej
* , z całym szacunkiem dla Michasia

Stąd

Jeśli kawałek tortu czekoladowego ma 661 kcal, Michaś zapełniłby swoje dzienne zapotrzebowanie na energię czterema kawałkami tortu… jednak do odważnych świat należy – im większa masa ciała, tym większe zapotrzebowanie na kalorie!

Jednomiany

Intuicje

Bardzo często w różnego rodzaju wzorach i matematycznych zapiskach pojawiają się mieszaniny liczb i liter połączonych działaniami matematycznymi, coś w rodzaju

Każdy taki zlepek liczb (naturalnych, wymiernych, całkowitych…[[2]](#footnote-2)) oraz liter (zmiennych, stałych, parametrów…) nazywamy *wyrażeniem algebraicznym* albo po prostu *wyrażeniem*.

Wyrażenia algebraiczne bardzo często mają postać kilku iloczynów, które do siebie dodajemy, tak powyższa suma iloczynów , oraz . Ze względu na kolejność wykonywania działań mnożenie wykonujemy w pierwszej kolejności, czyli obliczając wartość wyrażenia algebraicznego (po podstawieniu wartości liczbowych) zawsze musimy najpierw rozpracować poszczególne grupy iloczynów, a na koniec zajmujemy się ich sumowaniem. O każdym takim iloczynie możemy myśleć jak o unikalnej indywidualności, jakby bohaterze naszych matematycznych przygód. Sumowanie ich to tylko wprowadzanie tych bohaterów na scenę, zebranie ich wszystkich razem w celu odegrania spektaklu.

Każdego takiego bohatera nazywamy *jednomianem*. Jednomian to iloczyn liczby oraz zmiennych literowych, przykładowo

Liczba widniejąca w postaci cyfr to tzw. *współczynnik jednomianu*.

* W jednomianie współczynnikiem jest 25,3
* W jednomianie współczynnikiem jest (bardziej elegancka forma zapisu tego jednomianu to )
* W jednomianie współczynnikiem jest
* W jednomianie współczynnikiem jest
* W jednomianie współczynnikiem jest

W jednomianie nie mogą występować inne działania, jak dodawanie, odejmowanie czy dzielenie (dopuszczalne jest dzielenie w postaci ułamka, którego mianownikiem jest liczba)

Wyrażenie będące sumą jednomianów nazywamy *sumą algebraiczną* lub czasem *wielomianem*, choć pojęcie wielomianu odnosi się do trochę innej idei matematycznej. Dla przejrzystości zapisu i lepszego poczucia „jedności” i „zbitości” jednomianów pomija się znak mnożenia w jednomianach. Matematycy nie będą pisać sumy

Zamiast tego zapisujemy

Dzięki temu zapis jest krótszy i pozwala łatwiej rozróżnić od siebie poszczególne jednomiany, a nie powoduje niejednoznaczności. W ciągu przyszłej kariery matematycznej szybko odzwyczaisz się od zapisywania kropki mnożenia. W praktyce znak mnożenia zapisujemy tylko wtedy, gdy zapisujemy mnożenie dwóch liczb (zapisanych cyframi, nie za pomocą liter).

Teraz staje się jasne, dlaczego zmienne zapisujemy za pomocą jednoliterowych oznaczeń. Dla matematyka zapis

oznacza, że

Wciąż, jak najbardziej dopuszczalne jest ściubienie dopisków w indeksach dolnych zmiennych.

Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Potęgowanie]

Z estetycznego punktu widzenia wielomiany powinno się zapisywać, zaczynając od współczynnika liczbowego, a następnie wypisując kolejne zmienne w kolejności alfabetycznej[[3]](#footnote-3). Jeśli pewna zmienna występuje jako czynnik więcej niż jeden raz, nie piszemy jej dwukrotnie, a jedynie zwiększamy jej wykładnik.

Tak więc:

Redukcja wyrazów podobnych

Intuicje

Oznaczmy przez wagę pojedynczego bochenka chleba. Gdy położymy na wadze elektronicznej dwa bochenki, wskaże ona masę równą . Gdy położymy na wadze jeszcze trzy bochenki, będziemy mieli 5 bochenków ledwo mieszczących się na wadze, a więc waga wskaże masę . Stąd prosty wniosek:

Na zmiennych i stałych wyrażonych literami możemy wykonywać dowolne działania matematyczne. Powyższy przykład pokazuje dodanie do siebie dwóch jednomianów i uzyskanie w wyniku innego jednomianu. Dodawanie do siebie jednomianów mocno przypomina spostrzeżenia których dokonywaliśmy dawno temu, w temacie o dodawaniu liczb naturalnych:

Tak samo, jak intuicyjne jest dodawanie do siebie przedmiotów z naszego otoczenia, tak samo nie ma nic dziwnego w dodawaniu do siebie jednomianów. Jednomiany to bohaterowie opowiadanej przez nas historii, każdy z nich ma swój unikalny odmienny charakter. Współczynniki jednomianów określają liczbę tych bohaterów. Gdy więc dodajemy jednomiany, które mają „ten sam charakter”, po prostu zwiększamy ich ilość.

Niech i będą dowolnymi zmiennymi, które odzwierciedlają Twoje dzisiejsze marzenia o liczbach. Wówczas:

I nie ma absolutnie żadnego znaczenia, co właściwie reprezentują zmienne , i .

* Możemy sobie wyobrazić, że to kaloryczność jednej parówki, to liczba parówek w paczce, a to ilość paczek parówek przewożona od dostawcy z Warszawy do Grochowa. Wtedy cząstka jest bohaterem o imieniu „ilość kalorii, jakie wiezie jedna ciężarówka parówek z Warszawy do Grochowa”. Jeśli rano ciężarówka zrobiła 3 kursy, w ciągu dnia 10 kursów, a wieczorem 6 kursów, to w sumie do Grochowa dostarczono 20 bomb kalorycznych.
* Jeśli w jednej klatce schodowej jest pięter, na jednym piętrze mieszkań, a w każdym mieszkaniu żyje średnio osób, to oznacza liczbę osób mieszkających w jednej klatce. Zliczając 4 klatki schodowe od strony wschodniej, 6 klatek po stronie wschodniej i 10 klatek od strony północnej otrzymamy ilość osób mieszkających w całym blokowisku.

Jeśli w dwóch jednomianach występują dokładnie te same zmienne (w tej samej ilości), to jednomiany te opisują to samo zjawisko, „mają ten sam charakter” i możemy je do siebie dodać poprzez dodanie ich współczynników. Takie jednomiany nazywamy *wyrazami podobnymi.* Nie możemy jednak dodawać jednomianów, które mają różne zmienne lub różnią się liczbą ich wystąpień.

1. Ponieważ mamy zapędy seksistowskie, uwzględniamy tylko wzory dla mężczyzn. Właściwie tylko statystycznych mężczyzn. [↑](#footnote-ref-1)
2. i nie tylko [↑](#footnote-ref-2)
3. I tak nikt o to nie dba [↑](#footnote-ref-3)